

FOGLIO DI ESERCIZI 3

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Dove non specificato altrimenti, \mathbb{R}^n e i suoi sottospazi si intendono muniti della topologia euclidea.

Esercizio 1. Dimostrare che $\mathbb{R}^n - \{0\}$ è omeomorfo a $S^{n-1} \times \mathbb{R}$.

Suggerimento: considerare la funzione

$$f: S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$$

definita da $f(\mathbf{x}, t) = 2^t \mathbf{x}$.

Esercizio 2. Dare un esempio di spazio topologico X tale che X sia omeomorfo a $X \times X$.

Esercizio 3. Dimostrare che le palle aperte di \mathbb{R}^n sono omeomorfe a \mathbb{R}^n .

Esercizio 4. (1) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e suriettiva fra spazi topologici. Dimostrare che se D è denso in X , allora $f(D)$ è denso in Y .
Dedurre che se X è separabile, allora Y è separabile.

(2) Sia $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza unitaria. Usando il punto precedente, dimostrare che il sottoinsieme $S^1 \cap \mathbb{Q}^2$ dei punti a coordinate razionali è denso in S^1 (suggerimento: proiezione stereografica).

Esercizio 5. Indichiamo con \mathbb{R}_{Sf} la retta di Sorgenfrey. Dimostrare che il sottospazio

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}_{Sf} \times \mathbb{R}_{Sf} \mid x + y = 0\}$$

è discreto.